Primer Parcial de Matemática 2003
Cátedra de Gutiérrez

Matemática: R Matemática – Primer Parcial: 1° Cuat. de 2003 Tema 4

1. Hallar todos los puntos de la recta $y = -2x$ que distan $\sqrt{30}$ del punto (2, 1)

2. Determinar $k \in$ R para que la función $f_{(x)} = \dfrac{2x-8}{kx+3}$ verifique $\lim\limits_{x\to+\infty} f_{(x)} = 5$. Para el valor de k encontrado, calcular las ecuaciones de todas las asíntotas de f.

3. Hallar la fórmula de la función cuadrática f cuya imagen es el intervalo $(-\infty, 2]$ y cuyo gráfico pasa por los puntos (– 3, 0) y (5, 0).

4. Sea $f_{(x)} = 6 + \ln(x+4)$, hallar el conjunto dominio de f y calcular $\{x \in \text{R}: f_{(x)} = 1\}$.

Solución de los Ejercicios:

1) La ecuación de distancia es: $D^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

Uno de los puntos es (2, 1); el otro pertenece a la recta $y = -2x$ que se expresa como $(x, -2x)$. Así que aplicamos a la ecuación y tenemos:

$(\sqrt{30})^2 = (2-x)^2 + [1-(-2x)]^2$	Reemplazamos cada punto por su coordenada
$30 = (2-x)^2 + (1+2x)^2$	Operamos aritméticamente.
$30 = 4 - 4x + x^2 + 1 + 4x + 4x^2$	Recordar que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$30 = 5x^2 + 5$	Sumamos las x^2, las x y los números.
$(30-5)/5 = x^2$	Despejamos x
$5 = x^2$	No olvidar el módulo

$\sqrt{5} = |x| \to \sqrt{5} = x_1$ ó $-\sqrt{5} = x_2$

Si $x = \sqrt{5}$ entonces $y = -2\sqrt{5}$; siendo el punto $\boxed{(\sqrt{5}, -2\sqrt{5})}$

Si $x = -\sqrt{5}$ entonces $y = 2\sqrt{5}$; siendo el punto $\boxed{(\sqrt{5}, -2\sqrt{5})}$

2) Tenemos $f_{(x)} = \dfrac{2x-8}{kx+3}$ así que reemplazamos en $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-8}{kx+3} = 5$. Resolvemos el límite, igualamos los resultados y despejamos k.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-8}{kx+3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x} - \boxed{\frac{8}{x}}}{\frac{kx}{x} + \boxed{\frac{3}{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2-0}{k+0} = \frac{2}{k} \to \frac{2}{k} = 5 \to \boxed{\frac{2}{5} = k} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{8}{x} = 0$$

3) En toda función cuadrática entre los ceros, justo en la mitad se encuentra el eje de simetría por donde se ubica el vértice: $v_x = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1$. La imagen del vértice es el máximo de la función (puede ser un mínimo, según la función), en este caso 2. El vértice (1, 2).

Nos conviene utilizar la ecuación factorial: $f_{(x)} = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$

$f_{(x)} = a\,(x + 3)\,(x - 5)$

Necesitamos saber el valor de *a*, para ello utilizaremos las coordenadas del vértice y la despejaremos.

$2 = a\,(1 + 3)\,(1 - 5) \rightarrow 2 = a\,.\,4\,(-4) \rightarrow a = -\frac{1}{8}$

De esa manera la ecuación de la función cuadrática queda: $\boxed{f_{(x)} = -\frac{1}{8}\,(x + 3)\,(x - 5)}$

4) Para hallar el dominio de $f_{(x)} = 6 + \ln(x + 4)$ necesitamos establecer una inecuación:

$$x + 4 > 0 \rightarrow x > -4.$$

El dominio de esta función corresponde al conjunto que contiene a todos los números reales mayores que -4: Dom $_f$: $(-4, +\infty)$

Para hallar $f_{(x)} = 1$, necesitamos hallar el valor de x que nos de cómo resultado 1.

$1 = 6 + \ln(x + 4)$	Reemplazamos $f_{(x)}$ por 1 para despejar x.
$-5 = \ln(x + 4)$	Pasamos al 6 restando y el resultado es -5.
$e^{-5} = x + 4$	Recordando la definición de logaritmo lo expresamos como exponencial
$e^{-5} - 4 = x$	Despejamos x

$e^{-5} - 4$ ($-3{,}9933$ aproximadamente) es el valor de x que da como imagen 1.