

**(1) Álgebra (27) – Primer Parcial: 2<sup>do</sup> Cuat. 96**

## Tema 2

1. Hallar los valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  para que el conjunto de soluciones de  $S$  sea un plano que pasa por el

$$\text{punto } (1, -2, 1) \text{ si } S: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + ax_3 = 2 \\ 3x_1 - bx_2 + cx_3 = d \\ -x_1 - (b+8)x_2 + (c-4a)x_3 = d-8 \end{cases}$$

2. Sea  $S = \{x \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / x_{11} + x_{22} = x_{21} = 0\}$  Hallar un subespacio  $T$  de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que  $S + T = \mathbb{R}^{2 \times 2}$  y

$$S \cap T = \left\langle \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

3. Si  $S: -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$  y  $\Pi = \langle (-2, 1, 0, 1); (-5, 2, 1, 1); (-5, 2, 1, 1) \rangle$ . Hallar, si es posible, una base de  $S$  que contenga una base de  $\Pi$ . Expresar  $v = (2, 2, 2, 1)$  en la base hallada.

4. En  $\mathbb{R}^3$  sean  $P = (2, 1, 1)$  y  $\Pi: x_1 + x_2 - x_3 = 0$ . Encontrar  $A$  y  $B$  en  $\Pi$  de modo que los vectores

$\vec{v} = \vec{PA}$  y  $\vec{w} = \vec{PB}$  sean ortogonales.

**(2) Álgebra (27) – Primer Parcial: 2<sup>do</sup> Cuat. 96**

## Tema 3

1. Sea  $L$  la recta que pasa por  $(0, -1, 2)$  y  $(2, 1, 1)$ . Hallar dos rectas alabeadas, ambas perpendiculares a  $L$  y que además la corten. (Aclaración: dos rectas son alabeadas si no son paralelas, ni se cortan.)

2. Si  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  son soluciones de  $A \cdot x = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  es solución de  $A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Hallar tres soluciones de  $A \cdot x = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

3. Sean  $B = \{(1, 1, -1), (0, 1, 2), (2, 1, 0)\}$  y  $B' = \{(-1, 3, 2), (1, 4, 2)\}$ . Hallar  $v$  para que exista algún vector no nulo de  $\mathbb{R}^3$  cuyas coordenadas en la base  $B'$  coincidan con sus coordenadas en la base  $B$ .

4. Sean en  $\mathbb{R}^{2 \times 3}$  los subespacios  $S = \{a \in \mathbb{R}^{2 \times 3} / a_{11} + a_{22} = a_{12}\}$  y  $S' = \{a \in \mathbb{R}^{2 \times 3} / a_{12} - a_{21} = a_{13} = 0\}$ . Hallar un subespacio  $\Pi$ , tal que  $\Pi \subset S'$  y  $S \oplus \Pi = \mathbb{R}^{2 \times 3}$ .

**(3) Álgebra (27) – Primer Parcial: 2<sup>do</sup> Cuat. 96**

## Tema 4

1. Hallar los valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  para el conjunto de soluciones de  $S$ , sea un plano que pasa por

$$(1, 1, 1) \text{ si } S: \begin{cases} x_1 - ax_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + bx_2 - cx_3 = d \\ x_1 + (b-2n)x_2 - (2+c)x_3 = d-12 \end{cases}$$

2. Sea  $S = \{x \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / x_{11} + x_{12} + x_{21} = 0\}$ . Hallar un subespacio  $\Pi$  de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  y  $S \cup \Pi = \left\langle \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$

3. Si  $S: x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$  y  $\Pi = \langle (-1, 0, -1, 1), (2, -3, 2, 1) \rangle$  hallar si es posible, una base de  $S$  que contenga una base de  $\Pi^\perp$ . Expresar  $v = (2, 1, -1, 1)$  en la base hallada.

4. En  $\mathbb{R}^3$  sean  $P = (1, -1, 2)$  y  $\Pi: 2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ . Encontrar  $A$  y  $B$  en  $\Pi$  de modo que los vectores  $v = \vec{PA}$  y  $u = \vec{PB}$  sean ortogonales.

(4) **Álgebra (27)** – Primer Parcial: 2<sup>do</sup> Cuat. 96

Tema 1

1) Sean  $\Pi: 2x + y = 1$  y  $L: x = t(1, 1, 1) + (1, 0, 0)$ . Hallar los puntos  $P$  y  $Q \in L$ , tales que,  $L \cap \Pi$  sea el punto medio del segmento  $PQ$  y la longitud del segmento  $PQ$  sea igual a  $4\sqrt{3}$

2) Si el sistema  $A \cdot X = 0$  (con  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  y  $X \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ ) admite a la recta  $L: x = t(1, -1, 0)$  como solución. Hallar tres soluciones no triviales del sistema  $A \cdot B \cdot X = 0$  que no sean coloniales siendo  $B =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3) Sean  $S = \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + kx_3 + x_4 = 0 \end{cases}$  y  $L: X = \alpha(4, -2, 1, 4)$ . Hallar todos los valores de  $k \in \mathbb{R}$  para los cuales  $L \subset S^\perp$ .

4) Encontrar una base de  $\mathbb{R}^4$ ,  $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  que verifique  $\{v_1, v_2, v_3\}$  sea una base de  $\{x \in \mathbb{R}^4: x_4 = 0\}$ ;  $\{v_2, v_3, v_4\}$  sea base de  $\{x \in \mathbb{R}^4: x_2 = 0\}$  y  $[(1, -2, 1, 2)]_B = (1, 0, 0, 1)$ .

(5) **Álgebra (27)** – Primer Parcial: 1<sup>er</sup> Cuat. 96

Tema 1

1. a) Determinar la ecuación del plano  $\Pi$  cuyo punto más próximo al origen sea  $(-1, 2, 3)$  b) Determinar la ecuación de un plano  $\Pi'$  que verifique:  $\Pi \cap \Pi' = \{0\}$  y  $d(\Pi', 0) = d(\Pi, 0)$  donde  $0 = (0, 0, 0)$

2. Hallar los valores de  $a$  y  $b$  para que el conjunto de soluciones del sistema 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ bx_1 + bx_2 - x_3 = -a + 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

sea igual a  $\left\{ x \in \mathbb{R}^3: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

3. Si  $S = \langle (1, 1, 0, 0); (0, 1, 1, 0); (-1, 0, 1, 0) \rangle$  y  $v = (1, 3, 2, 1)$ , hallar  $v_1, v_2$  tales que  $v_1 \perp v_2$ ,

$$v = v_1 + v_2, \text{ y } v_1 \in S.$$

4. Si  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  y  $B' = \{v_1 - v_2, v_1 + v_2 + v_3, w\}$  son bases de un espacio vectorial  $V$  sobre  $\mathbb{R}$ :  $(w_1)_{B'} = (1, 0, 0)$   $(w_2)_{B'} = (0, 1, 1)$   $(w_3)_{B'} = (1, 0, 3)$ .

Hallar  $w$  si sabemos que  $(w_1 - w_2 + w_3)_{B'} = (-2, -3, 2)$ .

**(6) Álgebra (27)** – Primer Parcial: 1<sup>er</sup> Cuat. 97

## Tema 4

1) Sean  $L: x = (1, 2, -1) + \lambda(1, 1, 1)$ ;  $P = (1, 2, 0)$  y  $Q = (0, 1, -2)$ . Encontrar todos los puntos  $A \in L$  tales que el triángulo  $PAQ$  sea rectángulo en  $A$ .

2) Sean  $S: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$  y  $w = \langle (0, 1, -1, 0); (1, 0, 0, -1) \rangle$ . Decidir si el conjunto de soluciones de  $S$  está contenido en  $W$ . Justificar.

3) Sea  $S = \langle (1, -2, 0); (-2, 4, k^2 - 1); (k, 2, 0) \rangle$ . Determinar todos los valores de  $k$  para los cuales existe un subespacio  $W$  tal que:  $\dim. W = 1$  y  $S \oplus W = \mathbb{R}^3$ . Para algunos de los valores de  $k$  hallados, encontrar  $W$ .

4) Sean  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  y  $B' = \{v_1 - v_2, 2v_1 + v_2, v_3\}$  bases de un espacio vectorial  $V$  y  $v \in V$  un vector cuyas coordenadas en las base  $B$  con  $(1, 2, 4)$ . Hallar las coordenadas de  $v$  en la base  $B'$ .

**(7) Álgebra (27)** – Primer Parcial: 2<sup>do</sup> Cuat. 97

## Tema 3

1. Las rectas  $L_1: \lambda(2, 0, 1) + (1, 2, 1)$  y  $L_2: \lambda(1, -1, 2) + (1, -2, a)$  están contenidas en un plano  $\Pi$ . Determinar el valor de  $a$  y hallar la ecuación del plano  $\Pi$ .

2. Dadas  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & \alpha^2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3\alpha \end{pmatrix}$ , encontrar  $\alpha$  para que existan al menos

dos vectores  $x \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$  tales que  $Ax = Bx + C$

3. Dados  $S = \langle (1, 0, 1, 2); (2, 1, -1, 1) \rangle$  y  $\Pi = \langle (1, 0, -1, 0); (0, 1, 2, 1); (0, 1, 0, 1) \rangle$

Encontrar una base de  $\mathbb{R}^4$  que contenga a una base de  $S^\perp \cap \Pi$ .

4. Hallar una base  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que para todo  $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Las coordenadas de  $v$  en la base  $B$  son  $(x + y, x, y + 2z)$ .

**(8) Álgebra (27)** – Primer Parcial: 2<sup>do</sup> Cuat. 97 (Recuperatorio – Diferido)

## Tema 2

1. Hallar todos los puntos  $P$  de  $\mathbb{R}^3$  tales que  $\text{dist.}(P, \Pi) = \text{dist.}(P, \Pi')$  siendo  $\Pi = x_1 + 4x_2 - x_3 = 9$  y  $\Pi' = x_1 + 4x_2 - x_3 = 11$ .

2. Hallar todos los puntos del plano  $P: 3x_1 + x_2 + x_3 = 1$  que son solución del sistema  $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

3. Hallar, si existe,  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $B = \{(2, -2, 1, 0); (1, -1, 3, 0)\}$  sea base de  $(S \cap \Pi)$  si

$S: x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$  y  $\Pi: \langle (3, -3, 2\alpha, 0); (-1, 1, 2, 0); (1, -2, 1, -2\alpha) \rangle$

4. Si  $W = \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / a_{ij} = 0 \text{ si } i \leq j\}$  y  $S = \{(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / \sum_{j=1}^2 a_{ij} + a_{23} = 0\}$ .

Buscar  $\Pi$  en  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$  de modo que  $W + \Pi = S$ .

**(9) Álgebra (27)** – Primer Parcial: 1<sup>er</sup> Cuat. 98

## Tema 4

1. Sean las rectas  $L: \lambda(-1, 1, 2) + (2, 1, 3)$  y  $L': t(2, -1, 1) + (0, 2, 3)$ . Encontrar la ecuación de un plano  $\Pi$  que contenga a  $L$  y que todos los puntos de  $L'$  estén a igual distancia de  $\Pi$ .

2. Determinar todos los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  para los cuales el sistema  $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$  tiene infinitas soluciones

$$\text{siendo } A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & a-3 \end{pmatrix}$$

3. Hallar una base  $B$  de  $\mathbb{R}^3$  de manera que las coordenadas del vector  $(-1, 3, 2)$  en la base  $B$  sean  $(4, -1, 0)$ , y las coordenadas del vector  $(-2, -3, 1)$  en la base  $B$  sean  $(-1, 1, 0)$ .

4. Sean  $W = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - 2x_2 + 2x_4 = x_3 + x_4 = 0\}$  y  $\Pi = \langle (1, 0, -1, 0); (2, 1, 1, -1); (2, 0, 1, -3) \rangle$ . Hallar dos subespacios de  $\mathbb{R}^4$ ,  $S_1$  y  $S_2$ , tales que  $S_1 \subset W$ ;  $S_1 \oplus S_2 = \Pi$  y  $S_1 \neq 0$

**(10) Álgebra (27) – Primer Parcial: 2<sup>do</sup> Cuat. 98**

Tema 1

1. Sea  $\Pi$  el plano que pasa por los puntos  $A = (1, -1, 2)$ ,  $B = (0, 1, 3)$  y  $C = (1, 1, 0)$ . Determinar todos los puntos de  $\mathbb{R}^3$  que están a una distancia de  $\sqrt{11}$  de  $\Pi$ .

2. De todas las rectas de  $\mathbb{R}^3$  que pasan por el punto  $(2, 1, 0)$ , ¿Cuáles pueden ser el conjunto de solución del sistema  $S$ , para algún valor de  $a$  y  $b$ ?

$$S \begin{cases} 2x - ay + 2z = 2 \\ x + y - bz = 3 \\ 2y - 5z = 2 \end{cases}$$

3. Sean en  $\mathbb{R}^4$  los subespacios  $S = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$  y  $\Pi = \langle (1, 1, 1, 0); (2, 3, 2, 1); (0, 2, 1, 2) \rangle$ .

Hallar una base de  $\mathbb{R}^4$  que contenga simultáneamente a una base de  $S$  y una base de  $\Pi$ .

4. Sean  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  y  $B' = \{v_1 + v_2 - v_3, 2v_2 - v_3, v_1 + v_3\}$ , bases de  $V$ . Sea  $S$  el subespacio de todos los vectores de  $V$  que tienen las mismas coordenadas en la base  $B$  y  $B'$ .

Decidir si  $S$  está contenido en  $\langle v_1 - v_2; v_3 \rangle$ .

**(11) Álgebra (27) – Primer Parcial: 2<sup>do</sup> Cuat. 98**

Tema 2

1. Sea  $\Pi$  el plano que contiene a los puntos  $A = (0, 3, 0)$ ;  $B = (2, 0, -1)$ ;  $C = (2, 1, 0)$ , hallar todos los  $x \in \Pi$  que estén a igual distancia de  $A$ , de  $B$  y de  $C$ .

2. Sea en  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$   $S = \left\langle \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ . Encontrar todas las matrices  $x$  de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  que verifiquen  $x \cdot s = s \cdot x$  para toda matriz  $s$  de  $S$ .

3. Sean  $B = \{(1, 1, 1, 1); (1, 1, 1, 0); (-1, 1, 0, 0); (0, 0, -1, 1)\}$  una base de  $\mathbb{R}^4$  y  $v$  el vector cuyas coordenadas en la base  $B$  son  $(2, 1, 5, 0)$ . Encontrar un sistema de ecuaciones cuyas soluciones sean las cuatrefiñas  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  ortogonales a  $v$ .

4. Si  $S_1: 2x_1 + x_2 + ax_3 - x_4 = 0$  y  $S_2: x_1 + x_2 + x_3 + bx_4 = 0$ , hallar  $a$  y  $b$  para que los vectores  $v = (1, -1, 3, 0)$  y  $w = (2, 1, 0, 5)$  pertenezcan a  $S_1 \cap S_2$ . Para los valores de  $a$  y  $b$  determinados extender  $(v, w)$  a una base de  $S_1$ , a una base de  $S_2$  y a una base de  $S_1 \cap S_2$ . Justificar.