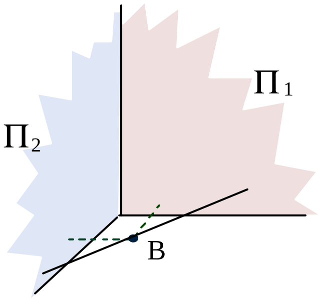
Primer Parcial de Álgebra 03/10/01

1) Sean L: X : λ (1, 2, 1) + (1, – 1, 0) y Π_1: plano que contiene el eje "*y*" y al eje "*z*"; Π_2: plano que contiene el eje "*x*" y al eje "*z*". Hallar todos los B $\in$ R tales que d(B Π_1) = d(B Π_2).

Estamos buscando un punto de la recta, llamado B, que se encuentre a igual distancia de ambos planos. El plano Π_1, $y - z = 0$; mientras que Π_2, al tener coordenada $y = 0$, su ecuación es $x - z = 0$.



La recta posee ecuación $(x, y, z) = \lambda\,(1, 2, 1) + (1, -1, 0)$

Desarrollándola paramétricamente tenemos: $\begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 1 \\ z = \lambda \end{cases}$

Aplicamos la ecuación para hallar la distancia entre un punto B a cada uno de los planos

d(B, Π_1) = $\dfrac{|2\lambda - 1 - (\lambda)|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|\lambda - 1|}{\sqrt{2}}$ d(B, Π_2) = $\dfrac{|\lambda + 1 - (\lambda)|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Las igualamos para hallar λ: $\dfrac{|\lambda - 1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 1 = 1 \Rightarrow \lambda = 2 \\ \lambda - 1 = -1 \Rightarrow \lambda = 0 \end{cases}$

Si $\lambda = 2$, el punto es (3, 3, 2) (reemplazar en la recta).

Si $\lambda = 0$, el punto es (1, – 1, 0)

2) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, sea T = {$b \in R^{3x1}$/ el sistema de la matriz ampliada (A; b) es compatible}. Hallar b_1 y $b_2 \in$ T, no nulos, tales que $b_1 \perp b_2$.

b es un matriz de 3x1 así que podemos escribirlo como $b = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$(A, b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & x \\ 1 & 3 & 3 & -3 & y \\ -1 & 1 & -1 & 5 & z \end{array}\right)$ Triangulemos para hallar el valor de x, y, z.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & x \\ 1 & 3 & 3 & -3 & y \\ -1 & 1 & -1 & 5 & z \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+F_1=F_3]{F_2-F_1=F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 & -4 & y-x \\ 0 & 2 & 1 & 6 & z+x \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3-F_2=F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 & -4 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 2x-y+z \end{array}\right)$$

Para todo vector de T^T: $b = (x, y - x, 2x - y + z)$ (se elige la traspuesta por que es más fácil de trabajar).

Buscamos dos vectores perpendiculares, o sea que su producto escalar sea cero.

$b_1 \,.\, b_2 = (x_1, y_1 - x_1, 2x_1 - y_1 + z_1) \,.\, (x_2, y_2 - x_2, 2x_2 - y_2 + z_2) = 0$

$x_1.\, x_2 + (y_1 - x_1).(y_2 - x_2) + (2x_1 - y_1 + z_1).(2x_2 - y_2 + z_2) = 0$

$x_1x_2 + y_1y_2 - y_1x_2 - x_1y_2 + x_1x_2 + 4x_1x_2 - 2x_1y_2 + 2x_1z_2 - 2x_2y_1 + y_1y_2 - y_1z_2 + 2x_2 z_1 - y_2 z_1 + z_1z_2 = 0$

$6\, x_1x_2 + 2\, y_1y_2 + z_1z_2 - 3\, y_1x_2 - 3\, x_1y_2 + 2x_1z_2 - y_1z_2 + 2x_2 z_1 - y_2 z_1 + z_1z_2 = 0$

$x_1\, (6x_2 - 3y_2 + 2z_2) + y_1\, (- 3x_2 + 2y_2 - z_2) + z_1\, (2x_2 - y_2 + z_2) = 0$

Para facilitar la operación suponemos que $x_1 = 1, y_1 = 1, z_1 = 1$

$b_1 = (1, 1 - 1, 2.1 - 1 + 1) = (1, 0, 2)$

Queda

$6x_2 - 3y_2 + 2z_2 - 3x_2 + 2y_2 - z_2 + 2x_2 - y_2 + z_2 = 0$

$5x_2 - 2\, y_2 + 2\, z_2 = 0$

Hay varios puntos que dan cero:

a) $x_2 = 0, y_2 = 1, z_2 = 1 \rightarrow b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $x_2 = - 2, y_2 = 0, z_2 = 5 \rightarrow b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . . .

Queda en ustedes verificar que son perpendiculares (en el parcial es la verificación lo que te asegura que no te hayas equivocado).

3) Sean $T = \{A \in R^{3x3} / a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0\}$; $S \subset R^{3x3} / S = < I >$, calcular dim. S + T.

Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ hallar: $s \in S$ y $t \in T / B = s + t$

Los elementos de T son matrices de 3x3 cuya diagonal principal debe dar cero, una base puede ser:

$$T = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Para calcular la dimensión de S + T sumamos la cantidad de vectores, 1 de S y 8 de T, así que:

Dim. (S + T) = 9

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d-h & a & b \\ c & d & e \\ f & g & h \end{pmatrix}$$ (recordar que la diagonal debe dar cero).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d-h & a & b \\ c & d & e \\ f & g & h \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 = \lambda - d - h} & 2 = a & 0 = b \\ -1 = c & \boxed{2 = \lambda + d} & 2 = e \\ -1 = f & -1 = g & \boxed{3 = \lambda + h} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda - d - h = 1 \\ \lambda + d + 0h = 2 \\ \lambda + 0d + h = 3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{triangulamos}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$h = 1$

$2d + 1 = 1 \rightarrow d = 0$

$\lambda - 0 - 1 = 1 \rightarrow \lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}}_{s} + \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}}_{t}$$

4) Sea B = $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ base de un espacio vectorial V. Sean S = $< v_1 + v_2 - 2v_3 + 2v_4; v_2 - v_3 + v_4 >$

T = $< v_1 + v_2 + 2v_3; v_1 + v_4 >$, hallar el subespacio $W \subset V$, tal que $W \oplus (S \cap T) = V$.

Busquemos un vector que pertenezca a la intersección de S y T.

$$S \cap T = \begin{cases} \vec{u} = \alpha(v_1 + v_2 - 2v_3 + 2v_4) + \beta(v_2 - v_3 + v_4) \\ \vec{u} = \gamma(v_1 + +v_2 + 2v_3) + \lambda(v_1 + v_3) \end{cases}$$

$\alpha\, v_1 + \alpha\, v_2 - 2\,\alpha\, v_3 + 2\,\alpha\, v_4 + \beta\, v_2 - \beta\, v_3 + \beta\, v_4 = \gamma\, v_1 + \gamma\, v_2 + 2\,\gamma\, v_3 + \lambda\, v_1 + \lambda\, v_4$

$v_1\,(\alpha - \gamma - \lambda) + v_2\,(\alpha + \beta - \gamma) + v_3\,(2\alpha - \beta - 2\,\gamma) + v_4\,(2\,\alpha + \beta - \lambda) = 0$

$$\begin{cases} \alpha - \gamma - \lambda = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta - 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta - \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{triangulando}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$-4\,\lambda - 2\gamma = 0 \rightarrow \gamma = -2\lambda$

$\beta = -\lambda$

$\alpha - \lambda - \gamma = 0 \rightarrow \alpha - \lambda + 2\lambda = 0 \rightarrow \alpha = -\lambda$

$\vec{u} = \lambda\,(v_1 + v_2 + 2v_3) - 2\,\lambda\,(v_1 + v_3) = \lambda\,\boxed{(-v_1 + v_2)}$ $\rightarrow$ intersección entre S y T.

Estamos buscando a W de manera que sumado a $S \cap T$ da V. Los vectores deben ser linealmente independientes.

$W = \{v_2, v_3, v_4\}$