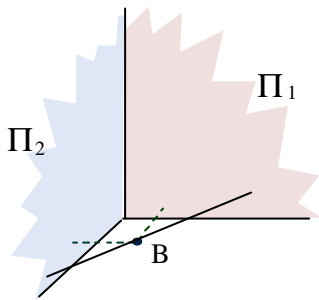


Primer Parcial de Álgebra 03/10/01

1) Sean $L: X : \lambda (1, 2, 1) + (1, -1, 0)$ y Π_1 : plano que contiene el eje “y” y al eje “z”; Π_2 : plano que contiene el eje “x” y al eje “z”. Hallar todos los $B \in \mathbb{R}$ tales que $d(B, \Pi_1) = d(B, \Pi_2)$.

Estamos buscando un punto de la recta, llamado B, que se encuentre a igual distancia de ambos planos. El plano Π_1 , $y - z = 0$; mientras que Π_2 , al tener coordenada $y = 0$, su ecuación es $x - z = 0$.



La recta posee ecuación $(x, y, z) = \lambda (1, 2, 1) + (1, -1, 0)$

Desarrollándola paramétricamente tenemos:
$$\begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Aplicamos la ecuación para hallar la distancia entre un punto B a cada uno de los planos

$$d(B, \Pi_1) = \frac{|2\lambda - 1 - (\lambda)|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|\lambda - 1|}{\sqrt{2}} \quad d(B, \Pi_2) = \frac{|\lambda + 1 - (\lambda)|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Las igualamos para hallar λ : $\frac{|\lambda - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 1 = 1 \Rightarrow \lambda = 2 \\ \lambda - 1 = -1 \Rightarrow \lambda = 0 \end{cases}$

Si $\lambda = 2$, el punto es $(3, 3, 2)$ (reemplazar en la recta).

Si $\lambda = 0$, el punto es $(1, -1, 0)$

2) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, sea $T = \{b \in \mathbb{R}^{3 \times 1} / \text{el sistema de la matriz ampliada } (A; b) \text{ es compatible}\}$. Hallar b_1 y $b_2 \in T$, no nulos, tales que $b_1 \perp b_2$.

b es un matriz de 3×1 así que podemos escribirlo como $b = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$(A, b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & x \\ 1 & 3 & 3 & -3 & y \\ -1 & 1 & -1 & 5 & z \end{array} \right)$ Triangulemos para hallar el valor de x, y, z .

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & x \\ 1 & 3 & 3 & -3 & y \\ -1 & 1 & -1 & 5 & z \end{array} \right) & \xrightarrow[\text{F}_3 + \text{F}_1 = \text{F}_3]{\text{F}_2 - \text{F}_1 = \text{F}_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 & -4 & y - x \\ 0 & 2 & 1 & 6 & z + x \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\text{F}_3 - \text{F}_2 = \text{F}_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 & -4 & y - x \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 2x - y + z \end{array} \right) \end{aligned}$$

Para todo vector de T^T : $b = (x, y - x, 2x - y + z)$ (se elige la traspuesta por que es más fácil de trabajar).

Buscamos dos vectores perpendiculares, o sea que su producto escalar sea cero.

$$b_1 \cdot b_2 = (x_1, y_1 - x_1, 2x_1 - y_1 + z_1) \cdot (x_2, y_2 - x_2, 2x_2 - y_2 + z_2) = 0$$

$$x_1 \cdot x_2 + (y_1 - x_1) \cdot (y_2 - x_2) + (2x_1 - y_1 + z_1) \cdot (2x_2 - y_2 + z_2) = 0$$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 - y_1 x_2 - x_1 y_2 + x_1 x_2 + 4x_1 x_2 - 2x_1 y_2 + 2x_1 z_2 - 2x_2 y_1 + y_1 y_2 - y_1 z_2 + 2x_2 z_1 - y_2 z_1 + z_1 z_2 = 0$$

$$6x_1 x_2 + 2y_1 y_2 + z_1 z_2 - 3y_1 x_2 - 3x_1 y_2 + 2x_1 z_2 - y_1 z_2 + 2x_2 z_1 - y_2 z_1 + z_1 z_2 = 0$$

$$x_1 (6x_2 - 3y_2 + 2z_2) + y_1 (-3x_2 + 2y_2 - z_2) + z_1 (2x_2 - y_2 + z_2) = 0$$

Para facilitar la operación suponemos que $x_1 = 1, y_1 = 1, z_1 = 1$

$$b_1 = (1, 1 - 1, 2 \cdot 1 - 1 + 1) = (1, 0, 2)$$

Queda

$$6x_2 - 3y_2 + 2z_2 - 3x_2 + 2y_2 - z_2 + 2x_2 - y_2 + z_2 = 0$$

$$5x_2 - 2y_2 + 2z_2 = 0$$

Hay varios puntos que dan cero:

$$\text{a) } x_2 = 0, y_2 = 1, z_2 = 1 \rightarrow b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } x_2 = -2, y_2 = 0, z_2 = 5 \rightarrow b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \dots$$

Queda en ustedes verificar que son perpendiculares (en el parcial es la verificación lo que te asegura que no te hayas equivocado).

3) Sean $T = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} / a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0\}$; $S \subset \mathbb{R}^{3 \times 3} / S = \langle I \rangle$, calcular $\dim. S + T$.

$$\text{Si } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ hallar: } s \in S \text{ y } t \in T / B = s + t$$

Los elementos de T son matrices de 3×3 cuya diagonal principal debe dar cero, una base puede ser:

Si necesitas clases de apoyo puedes llamar al 4585 – 1548 (capital).

$$T = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Para calcular la dimensión de S + T sumamos la cantidad de vectores, 1 de S y 8 de T, así que:

Dim. (S + T) = 9

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d-h & a & b \\ c & d & e \\ f & g & h \end{pmatrix} \text{ (recordar que la diagonal debe dar cero).}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d-h & a & b \\ c & d & e \\ f & g & h \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 = \lambda - d - h & 2 = a & 0 = b \\ -1 = c & 2 = \lambda + d & 2 = e \\ -1 = f & -1 = g & 3 = \lambda + h \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda - d - h = 1 \\ \lambda + d + 0h = 2 \\ \lambda + 0d + h = 3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{triangulamos}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$h = 1$

$2d + 1 = 1 \rightarrow d = 0$

$\lambda - 0 - 1 = 1 \rightarrow \lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow t \\ \rightarrow s \end{matrix}$$

4) Sea B = {v₁, v₂, v₃, v₄} base de un espacio vectorial V. Sean S = < v₁+ v₂ - 2v₃ + 2v₄; v₂ - v₃ + v₄>

T = < v₁+ v₂ + 2 v₃; v₁ + v₄>, hallar el subespacio W ⊂ V, tal que W ⊕ (S ∩ T) = V.

Busquemos un vector que pertenezca a la intersección de S y T.

$$S \cap T = \begin{cases} \vec{u} = \alpha(v_1 + v_2 - 2v_3 + 2v_4) + \beta(v_2 - v_3 + v_4) \\ \vec{u} = \gamma(v_1 + v_2 + 2v_3) + \lambda(v_1 + v_3) \end{cases}$$

$$\alpha v_1 + \alpha v_2 - 2\alpha v_3 + 2\alpha v_4 + \beta v_2 - \beta v_3 + \beta v_4 = \gamma v_1 + \gamma v_2 + 2\gamma v_3 + \lambda v_1 + \lambda v_4$$

$$v_1(\alpha - \gamma - \lambda) + v_2(\alpha + \beta - \gamma) + v_3(2\alpha - \beta - 2\gamma) + v_4(2\alpha + \beta - \lambda) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha - \gamma - \lambda = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta - 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta - \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{triangulando}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-4\lambda - 2\gamma = 0 \rightarrow \gamma = -2\lambda$$

$$\beta = -\lambda$$

$$\alpha - \lambda - \gamma = 0 \rightarrow \alpha - \lambda + 2\lambda = 0 \rightarrow \alpha = -\lambda$$

$$\vec{u} = \lambda(v_1 + v_2 + 2v_3) - 2\lambda(v_1 + v_3) = \lambda(-v_1 + v_2) \rightarrow \text{intersección entre S y T.}$$

Estamos buscando a W de manera que sumado a $S \cap T$ da V. Los vectores deben ser linealmente independientes.

$$W = \{v_2, v_3, v_4\}$$

Si necesitas Ayuda para aprobar las materias que cursas o adeudas

Puedes llamar al (011) **4585 – 1548** (Capital federal).