

(1) Primer Parcial: 1999

1. Hallar, si es posible, las ecuaciones de los planos con normal  $N = (4, -2, 4)$  que están a 5 del punto  $P = (0, 1, -1)$

2. Determinar los valores de  $k$  para los cuales el siguiente sistema tiene solución única:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ kx_1 + (k+2)x_2 + (k+1)x_3 = 0 \\ (k+1)x_1 + (k+2)x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

3. Sea  $S = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$  y sea  $B = \{(-1, 1, 1, 1); (-3, 1, -1, -1); (1, -1, -3, -1); (-2, 1, 0, 1)\}$ . Hallar, si es posible, un conjunto  $B' \subset B$  tal que  $B'$  sea base de  $S$ . Justificar.

4. Sea  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  una base de  $\mathbb{R}^3$ . Si  $S = \langle v_1 + 2v_2, v_2 - v_3, v_1 + v_2 + v_3 \rangle$

a) Hallar una base del subespacio  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$  tal que  $S \oplus \Pi = \mathbb{R}^3$ . b) Si  $v_1 = (1, -1, 1)$ ;  $v_2 = (-1, 1, 0)$  y  $v_3 = (1, 0, 0)$ , dar las coordenadas de los elementos de la base hallada en a) en la base  $B$  y en la base canónica.

Rta: 1)  $2x - y + 2z = 12$ ; 2)  $k \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$ ; 3)  $B' = \langle (-1, 1, 1, 1); (-1, -1, -3, -1); (-2, 1, 0, 1) \rangle$ ; 4) a)  $\Pi = \langle v_1 - 2v_2, v_2 + v_3, v_3 - v_1 - v_2 \rangle$ . b) ármenla.

(2) Primer Parcial: 1998

1) Sea  $S = \{x \in \mathbb{R}^4 / 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \text{ y } x_4 = 0\}$ . Hallar un subespacio  $\Pi \subset \mathbb{R}^4$  tal que

$(1, 0, -1, 2) \in \Pi$  y  $\mathbb{R}^4 = S \oplus \Pi$ .

2) Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ;  $S = \langle (a, 1, a); (3^a, a, -a) \rangle$ . Hallar la dimensión de  $S \forall a \in \mathbb{R}$ . Justificar la respuesta.

3) Hallar todas las matrices  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  que verifican:  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

4) Sean  $L$ , la recta de dirección  $(1, 2, -2)$  que pasa por el punto  $P = (a, b, c)$  y sea  $Q$  el punto  $Q = (1, 2, -2) + (a, b, c)$ . Si  $\Pi$  es el plano perpendicular a  $L$  que pasa por  $P$ , probar que  $d(Q, \Pi) = \|(1, 2, -2)\|$ .

Rta: 1)  $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ y } x_2 - 2x_3 = x_4\}$ ; 2) Dim: 2; 3)  $A$  es canónica; 4)  $Q$  es un punto de la recta  $L \Rightarrow d \|Q \Pi\| = d \|P Q\| = \|Q - P\| = \|(1, 2, -2) + (a, b, c) - (a, b, c)\| = \|(1, 2, -2)\|$ .

(3) Primer Parcial: 1997

Tema 3

1. Sea  $\Pi$  en el plano que pasa por los puntos  $A = (1, -1, 0)$ ,  $B = (2, 0, -1)$  y  $C = (3, -2, 1)$  y sea  $\beta = \{(1, -1, 1); (1, 1, 0); (-1, 0, 0)\}$ . Encontrar un punto  $P$  del plano  $\Pi$ , cuyas coordenadas en la base  $\beta$  sean de la forma:  $(P)_\beta = (\lambda + 1, \lambda + 1, \lambda - 1)$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

2. Si el determinante de la matriz  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  es igual a 6, calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3c & d \\ 0 & 0 & 3a & b \end{pmatrix}$$

3. Sean  $S$  y  $T$  los subespacios de  $\mathbb{R}^4$  definidos por

$$S: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + (a+2)x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad T: \begin{cases} (a^2 - 9)x_2 + 2x_4 = 0 \\ (a+3)x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Calcular la dimensión de  $S \cap T$  para todos los valores de  $a \in \mathbb{R}$ .

4. En  $\mathbb{R}^4$ , sean  $S = \langle (1, -1, 1, 0); (1, -2, 0, 1) \rangle$  y sea  $H = \{x / x \in \mathbb{R}, x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ . Hallar, si es posible, una base de  $H$  que contenga a una base de  $S^\perp$ .

Respuestas: 1)  $P = (2, 0, 1)$ ; 2) 126; 3) Dim  $S \cap T = 0$ ; 4)  $\langle (1, 1, 0, 1); (-1, 0, 1, 1); (0, 0, 0, 1) \rangle$